Solutions des Exercices / MATH 11è / Inéquations du Second Degré

EX 1) Résoudre les inéquations suivantes:

a) $(x^2+8)(-x^2-5)<0$

(x^2+8) est toujours positif.

$(-x^2-5)$ est toujours négatif.

Alors, le produit $\underline{(x^2+8)(-x^2-5)}$ est toujours <u>négatif</u>.

S= $\mathbb{R}$

---

b) $x+3x^2 \geq 0$

$x+3x^2 = x(1+3x) = x(3x+1) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0 \;$ et $\; x_2 = -\frac{1}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$x+3x^2$			0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S = \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup [0; +\infty[}$$

---

c) $2x^2-5x>-3 \quad \Longrightarrow \quad 2x^2-5x+3>0 \quad \Longrightarrow \quad (2x-3)(x-1)>0$

$x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = 1$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x^2-5x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-\infty; 1[\cup \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[}$$

d) $x^2 - 2x + 5 < 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \qquad a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = 5 \implies \Delta = 4 - 20 = -16 < 0$

On a $\underline{\Delta < 0}$ et $\underline{a > 0}$, alors le trinôme $\underline{x^2 - 2x + 5}$ est toujours <u>positif</u>.

S=$\emptyset$

---

e) $-x^2 + 6x \geq 9 \implies -x^2 + 6x - 9 \geq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \qquad a = -1 \qquad b = 6 \qquad c = -9 \implies \Delta = 36 - 36 = 0$

$\underline{\Delta = 0 \ \rightarrow}$ RACINE DOUBLE

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-x^2 + 6x - 9$		$-$	0	$-$	

S={3}

---

f) $-x^2 + 2x - 7 \leq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \qquad a = -1 \qquad b = 2 \qquad c = -7 \implies \Delta = 4 - 28 = -24 < 0$

On a $\underline{\Delta < 0}$ et $\underline{a < 0}$, alors le trinôme $\underline{-x^2 + 2x - 7}$ est toujours <u>négatif</u>.

S= $\mathbb{R}$

EX 2) Résoudre les inéquations suivantes:

a) $(x+1)(2x+7) > 1 - 4x$

$2x^2 + 7x + 2x + 7 - 1 + 4x > 0 \implies 2x^2 + 13x + 6 > 0$

$(2x+1)(x+6) > 0$

$$\boxed{S = \left]-\infty; -6\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[}$$

$x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = -6$

x	$-\infty$		-6		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x^2 + 13x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $(x-1)(3x-1) < 6-2x$

$3x^2 - x - 3x + 1 - 6 + 2x < 0 \implies 3x^2 - 2x - 5 < 0$

$(3x-5)(x+1) < 0$

$x_1 = \frac{5}{3}$ et $x_2 = -1$

$\boxed{S =]-1\,;\,\frac{5}{3}[}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x^2-2x-5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

---

c) $(x^2+x-12)(x-1) \leq 0 \implies (x+4)(x-3)(x-1) \leq 0$

$x_1 = -4$, $x_2 = 3$ et $x_3 = 1$

x	$-\infty$		-4		1		3		$+\infty$
$(x^2+x-12)(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{S =]-\infty;-4] \cup [1;3]}$

---

d) $\frac{3x-7}{x-1} \geq x+7 \implies \frac{3x-7}{x-1} - (x+7) \geq 0$

$\frac{3x-7-(x+7)(x-1)}{x-1} \geq 0 \implies \frac{3x-7-(x^2-x+7x-7)}{x-1} \geq 0$

$\frac{3x-7-x^2-6x+7}{x-1} \geq 0 \implies \frac{-x^2-3x}{x-1} \geq 0 \implies \frac{-x(x+3)}{x-1} \geq 0$

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-x(x+3)}{x-1}$		$+$		$-$		$+$	$\Vert$	$-$	

$\boxed{S =]-\infty;-3] \cup [0;1[}$

Remarque:
1 est une valeur interdite car elle annule le dénominateur $x-1$

e) $\dfrac{2x-5}{x-1} > \dfrac{x-6}{x+2} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{2x-5}{x-1} - \dfrac{x-6}{x+2} > 0$

$$\frac{(2x-5)(x+2)-(x-6)(x-1)}{(x-1)(x+2)} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{(2x^2+4x-5x-10)-(x^2-x-6x+6)}{(x-1)(x+2)} > 0$$

$$\frac{2x^2-x-10-x^2+7x-6}{(x-1)(x+2)} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2+6x-16}{(x-1)(x+2)} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{(x+8)(x-2)}{(x-1)(x+2)} > 0$$

x	$-\infty$		-8		-2		1		2		$+\infty$
$x+8$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
$\dfrac{(x+8)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$		$+$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$		$+$	

$S =]-\infty;-8[\cup]-2;1[\cup]2;+\infty[$

---

f) $\dfrac{3x-7}{x-2} \leq \dfrac{x+5}{x+1} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{3x-7}{x-2} - \dfrac{x+5}{x+1} \leq 0$

$$\frac{(3x-7)(x+1)-(x+5)(x-2)}{(x-2)(x+1)} \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{(3x^2+3x-7x-7)-(x^2-2x+5x-10)}{(x-2)(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{3x^2-4x-7-x^2-3x+10}{(x-2)(x+1)} \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2x^2-7x+3}{(x-2)(x+1)} \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{(2x-1)(x-3)}{(x-2)(x+1)} \leq 0$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		3		$+\infty$
$2x-1$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
$x-3$		$-$	$\Vert$	$-$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$	$\Vert$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
$\dfrac{(2x-1)(x-3)}{(x-2)(x+1)}$		$+$	$\Vert$	$-$		$+$	$\Vert$	$-$		$+$	

$S =]-1;\frac{1}{2}] \cup]2;3]$

Remarque:
-1 et 2 sont des valeurs interdites car elles annulent le dénominateur.

EX 3) On donne $f(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m + 2$. Pour quelles valeurs de m, ce trinôme est toujours positif ?

Soit le trinôme $ax^2 + bx + c$

Si $\Delta < 0$, le trinôme est du signe de a pour tout x .

$\underline{a = m}$, $\underline{b = 2(m+1)}$ et $\underline{c = m+2}$

$a > 0 \implies m > 0$

$\Delta < 0 \implies [2(m+1)]^2 - 4m(m+2) < 0$

$\Delta = [2(m+1)]^2 - 4m(m+2) = 4(m^2 + 2m + 1) - 4m^2 - 8m = 4$

On ne peut pas trover les valeurs de m pour que ce trinôme soit toujours positif car $\Delta = 4 > 0$

EX 4) On donne $f(x) = mx^2 + (m-1)x + m - 1$. Pour quelles valeurs de m, ce trinôme est toujours négatif?

Soit le trinôme $ax^2 + bx + c$

Si $\Delta < 0$, le trinôme est du signe de a pour tout x .

$\underline{a = m}$, $\underline{b = m-1}$ et $\underline{c = m-1}$

$a < 0 \implies m < 0$

$\Delta < 0 \implies (m-1)^2 - 4m(m-1) < 0 \implies m^2 - 2m + 1 - 4m^2 + 4m < 0$

$\implies -3m^2 + 2m + 1 < 0$

$\Delta_m = 2^2 - 4(-3)(1) = 16 \qquad \sqrt{\Delta_m} = \sqrt{16} = 4$

$$m_1 = \frac{-2+4}{-6} = -\frac{1}{3} \qquad m_2 = \frac{-2-4}{-6} = 1$$

m	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$-3m^2 + 2m + 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\left.\begin{array}{l} a < 0 \implies m < 0 \\ \Delta < 0 \implies m \in]-\infty; -\frac{1}{3}[\cup]1; +\infty[\end{array}\right\} \boxed{m \in]-\infty; -\frac{1}{3}[}$$

EX 5) Résoudre le système d'inéquation pour chacun des cas suivants:

a) $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 > 0 \\ x^2 - 5x + 6 < 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - x + 4 > 0 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases}$

a) $x^2 - 7x + 6 > 0 \implies (x-1)(x-6) > 0 \implies x \in]-\infty; 1[\cup]6; +\infty[$

$x^2 - 5x + 6 < 0 \implies (x-2)(x-3) < 0 \implies x \in]2; 3[$

$$\left.\begin{array}{r} x \in]-\infty; 1[\cup]6; +\infty[\\ x \in]2; 3[\end{array}\right\} \boxed{S = \emptyset}$$

b)

$x^2 - x + 4 > 0 \implies \Delta = -15 < 0 \implies x \in \mathbb{R}$ $(ce\ trinôme\ est\ toujours\ positif)$

$x^2 - 2x - 3 \leq 0 \implies (x+1)(x-3) \leq 0 \implies x \in [-1; 3]$

$$\boxed{S = [-1; 3]}$$