

Solutions des Exercices / MATH 11<sup>e</sup> / Inéquations du Second Degré

**EX 1)** Résoudre les inéquations suivantes:

a)  $(x^2 + 8)(-x^2 - 5) < 0$

$(x^2 + 8)$  est toujours positif.

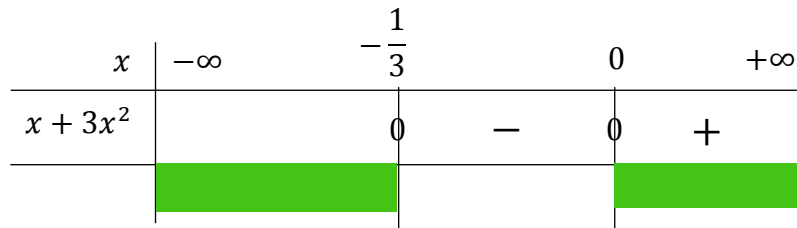
$(-x^2 - 5)$  est toujours négatif.

Alors, le produit  $(x^2 + 8)(-x^2 - 5)$  est toujours négatif.

$$S = \mathbb{R}$$

b)  $x + 3x^2 \geq 0$

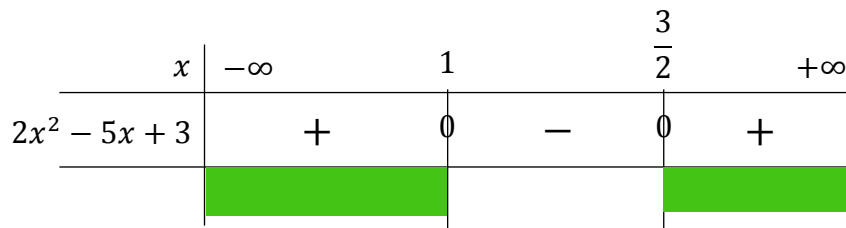
$$x + 3x^2 = x(1 + 3x) = x(3x + 1) \Rightarrow x_1 = 0 \text{ et } x_2 = -\frac{1}{3}$$



$$S = ] -\infty; -\frac{1}{3} ] \cup [ 0; +\infty [$$

c)  $2x^2 - 5x > -3 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 > 0 \Rightarrow (2x - 3)(x - 1) > 0$

$$x_1 = \frac{3}{2} \text{ et } x_2 = 1$$



$$S = ] -\infty; 1 [ \cup ] \frac{3}{2}; +\infty [$$

d)  $x^2 - 2x + 5 < 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \quad a = 1 \quad b = -2 \quad c = 5 \Rightarrow \Delta = 4 - 20 = -16 < 0$

On a  $\Delta < 0$  et  $a > 0$ , alors le trinôme  $x^2 - 2x + 5$  est toujours positif.

$S = \emptyset$

e)  $-x^2 + 6x \geq 9 \Rightarrow -x^2 + 6x - 9 \geq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \quad a = -1 \quad b = 6 \quad c = -9 \Rightarrow \Delta = 36 - 36 = 0$

$\Delta = 0 \rightarrow$  RACINE DOUBLE

$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3$

$x$	$-\infty$	<b>3</b>	$+\infty$
$-x^2 + 6x - 9$	-	0 0	-

$S = \{3\}$

f)  $-x^2 + 2x - 7 \leq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \quad a = -1 \quad b = 2 \quad c = -7 \Rightarrow \Delta = 4 - 28 = -24 < 0$

On a  $\Delta < 0$  et  $a < 0$ , alors le trinôme  $-x^2 + 2x - 7$  est toujours négatif.

$S = \mathbb{R}$

**EX 2) Résoudre les inéquations suivantes:**

a)  $(x + 1)(2x + 7) > 1 - 4x$

$2x^2 + 7x + 2x + 7 - 1 + 4x > 0 \Rightarrow 2x^2 + 13x + 6 > 0$

$(2x + 1)(x + 6) > 0$

$x_1 = -\frac{1}{2}$  et  $x_2 = -6$

$S = ]-\infty; -6[ \cup ]-\frac{1}{2}; +\infty[$

$x$	$-\infty$	-6	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$2x^2 + 13x + 6$	+	0	-	0	+
	█			█	

b)  $(x - 1)(3x - 1) < 6 - 2x$

$$3x^2 - x - 3x + 1 - 6 + 2x < 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 5 < 0$$

$$(3x - 5)(x + 1) < 0$$

$$x_1 = \frac{5}{3} \text{ et } x_2 = -1$$

$$S = ] -1 ; \frac{5}{3} [$$

	$x$	$-\infty$	$-1$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
		$+$	$0$	$-$	$+$
	$3x^2 - 2x - 5$				

c)  $(x^2 + x - 12)(x - 1) \leq 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 3)(x - 1) \leq 0$

$$x_1 = -4, x_2 = 3 \text{ et } x_3 = 1$$

	$x$	$-\infty$	$-4$	$1$	$3$	$+\infty$
		$-$	$0$	$+$	$-$	$+$
	$(x^2 + x - 12)(x - 1)$					

$$S = ] -\infty ; -4] \cup [1 ; 3]$$

d)  $\frac{3x - 7}{x - 1} \geq x + 7 \Rightarrow \frac{3x - 7}{x - 1} - (x + 7) \geq 0$

$$\frac{3x - 7 - (x + 7)(x - 1)}{x - 1} \geq 0 \Rightarrow \frac{3x - 7 - (x^2 - x + 7x - 7)}{x - 1} \geq 0$$

$$\frac{3x - 7 - x^2 - 6x + 7}{x - 1} \geq 0 \Rightarrow \frac{-x^2 - 3x}{x - 1} \geq 0 \Rightarrow \frac{-x(x + 3)}{x - 1} \geq 0$$

	$x$	$-\infty$	$-3$	$0$	$1$	$+\infty$
		$+$	$+$	$0$	$-$	$-$
	$-x$					
		$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
	$x + 3$					
		$-$	$-$	$-$	$0$	$+$
	$x - 1$					
		$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
	$-x(x + 3)$					
	$\frac{-x(x + 3)}{x - 1}$					

$$S = ] -\infty ; -3] \cup [0 ; 1[$$

Remarque:  
1 est une valeur interdite car elle annule le dénominateur  $x - 1$

$$e) \frac{2x-5}{x-1} > \frac{x-6}{x+2} \Rightarrow \frac{2x-5}{x-1} - \frac{x-6}{x+2} > 0$$

$$\frac{(2x-5)(x+2) - (x-6)(x-1)}{(x-1)(x+2)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(2x^2 + 4x - 5x - 10) - (x^2 - x - 6x + 6)}{(x-1)(x+2)} > 0$$

$$\frac{2x^2 - x - 10 - x^2 + 7x - 6}{(x-1)(x+2)} > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 6x - 16}{(x-1)(x+2)} > 0 \Rightarrow \frac{(x+8)(x-2)}{(x-1)(x+2)} > 0$$

x	$-\infty$	-8	-2	1	2	$+\infty$
x+8	-	0	+	+	+	+
x-2	-	-	-	-	0	+
x-1	-	-	-	0	+	+
x+2	-	-	0	+	+	+
$(x+8)(x-2)$	+	-	+	-	+	+
$\frac{(x+8)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$						

$$S = ]-\infty; -8[ \cup ]-2; 1[ \cup ]2; +\infty[$$

$$f) \frac{3x-7}{x-2} \leq \frac{x+5}{x+1} \Rightarrow \frac{3x-7}{x-2} - \frac{x+5}{x+1} \leq 0$$

$$\frac{(3x-7)(x+1) - (x+5)(x-2)}{(x-2)(x+1)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(3x^2 + 3x - 7x - 7) - (x^2 - 2x + 5x - 10)}{(x-2)(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{3x^2 - 4x - 7 - x^2 - 3x + 10}{(x-2)(x+1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 7x + 3}{(x-2)(x+1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(2x-1)(x-3)}{(x-2)(x+1)} \leq 0$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	2	3	$+\infty$
2x-1	-	-	0	+	+	+
x-3	-	-	-	-	0	+
x-2	-	-	-	0	+	+
x+1	-	0	+	+	+	+
$(2x-1)(x-3)$	+	-	+	-	+	+
$\frac{(2x-1)(x-3)}{(x-2)(x+1)}$						

$$S = ]-1; \frac{1}{2}] \cup ]2; 3]$$

**Remarque:**  
-1 et 2 sont des valeurs interdites car elles annulent le dénominateur.

**EX 3)** On donne  $f(x) = mx^2 + 2(m + 1)x + m + 2$ . Pour quelles valeurs de  $m$ , ce trinôme est toujours positif ?

Soit le trinôme  $ax^2 + bx + c$

Si  $\Delta < 0$ , le trinôme est du signe de  $a$  pour tout  $x$ .

$$a = m, \quad b = 2(m + 1) \quad \text{et} \quad c = m + 2$$

$$a > 0 \Rightarrow m > 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow [2(m + 1)]^2 - 4m(m + 2) < 0$$

$$\Delta = [2(m + 1)]^2 - 4m(m + 2) = 4(m^2 + 2m + 1) - 4m^2 - 8m = 4$$

On ne peut pas trouver les valeurs de  $m$  pour que ce trinôme soit toujours positif car

$$\Delta = 4 > 0$$

**EX 4)** On donne  $f(x) = mx^2 + (m - 1)x + m - 1$ . Pour quelles valeurs de  $m$ , ce trinôme est toujours négatif ?

Soit le trinôme  $ax^2 + bx + c$

Si  $\Delta < 0$ , le trinôme est du signe de  $a$  pour tout  $x$ .

$$a = m, \quad b = m - 1 \quad \text{et} \quad c = m - 1$$

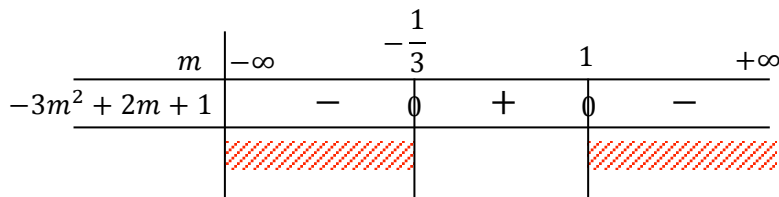
$$a < 0 \Rightarrow m < 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (m - 1)^2 - 4m(m - 1) < 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 - 4m^2 + 4m < 0$$

$$\Rightarrow -3m^2 + 2m + 1 < 0$$

$$\Delta_m = 2^2 - 4(-3)(1) = 16 \quad \sqrt{\Delta_m} = \sqrt{16} = 4$$

$$m_1 = \frac{-2 + 4}{-6} = -\frac{1}{3} \quad m_2 = \frac{-2 - 4}{-6} = 1$$



$$\left. \begin{array}{l} a < 0 \Rightarrow m < 0 \\ \Delta < 0 \Rightarrow m \in ]-\infty; -\frac{1}{3}[ \cup ]1; +\infty[ \end{array} \right\} m \in ]-\infty; -\frac{1}{3}[$$

gokcedogan.com

**EX 5)** Résoudre le système d'inéquation pour chacun des cas suivants:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 - 7x + 6 > 0 \\ x^2 - 5x + 6 < 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 - x + 4 > 0 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - 7x + 6 > 0 &\Rightarrow (x - 1)(x - 6) > 0 \Rightarrow x \in ] - \infty; 1[ \cup ] 6; +\infty[ \\ x^2 - 5x + 6 < 0 &\Rightarrow (x - 2)(x - 3) < 0 \Rightarrow x \in ] 2; 3[ \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in ] - \infty; 1[ \cup ] 6; +\infty[ \\ x \in ] 2; 3[ \end{array} \right\} S = \emptyset$$

b)

$$\begin{aligned} x^2 - x + 4 > 0 &\Rightarrow \Delta = -15 < 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \quad (\text{ce trinôme est toujours positif}) \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 &\Rightarrow (x + 1)(x - 3) \leq 0 \Rightarrow x \in [-1; 3] \end{aligned}$$

$$S = [-1; 3]$$