APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION (I)

1) Sens de Variation

Soit une fonction *f* définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si la dérivée *f ′* est (strictement) positive sur I, sauf peut-être en un nombre fini de points isolés où elle s'annule, alors *f* est (strictement) croissante sur I.
- Si la dérivée *f ′* est (strictement) négative sur I, sauf peut-être en un nom- bre fini de points isolés où elle s'annule, alors *f* est (strictement) décrois- sante sur I.
- Si la dérivée *f ′* est nulle sur I, alors *f* est constante sur I.

Remarque : *Ces résultats deviennent faux si I n'est pas un intervalle.*

2.Extremum d'une Fonction

- Si la fonction *f* est définie et dérivable sur un intervalle ouvert I et si *f ′* s'annule et change de signe en x_0, alors *f* admet un extremum (maximum ou minimum) en x_0. Cet extremum est égal à $f(x_0)$.
- Si la fonction *f* est définie et dérivable sur un intervalle ouvert I et si *f* admet un extremum en x_0, alors *f ′* s'annule en x_0.

Remarque : *Si la dérivée s'annule en x_0, sans changer de signe, alors la fonction n'admet pas d'extremum en x_0.*

Toute fois la courbe C_f admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une tangente horizontale.

Rappels sur les Études de Signe :

Pour étudier le signe de $f'(x)$, on factorise si possible $f'(x)$ sous la forme d'un produit ou d'un quotient d'expressions du premier ou du second degré dont on sait étudier le signe grâçe aux règles suivantes :

- **Signe de $ax+b$ ($a \neq 0$):** On détermine la valeur de x qui annule $ax + b$, puis on applique la règle : "signe de a après le 0".

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
ax+b	signe de (-a)	0	signe de (a)

- **Signe de $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$):** On calcule la discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ (sauf cas évidents).

- Si $\Delta < 0$, on applique la règle : "toujours du signe de a".

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de (a)	

- Si $\Delta=0$, on calcule la racine double:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

x	$-\infty$	$x_{1,2}$ $(-b/2a)$	$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de (a)	0	signe de (a)

- Si $\Delta > 0$, on calcule les deux racines:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad\qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de (a)	0	signe de (-a)	0	signe de (a)	

(On suppose que $x_1 < x_2$)

Exemple d'Application:

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^3 - 3x + 7$.

Calculer sa dérivée, en chercher le signe, puis donner les variations de cette fonction sous forme de tableau.

Solution:

La fonction f est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur IR.

Indication : Pour étudier le sens de variation de f, on calcule sa dérivée f' .

$f(x) = x^3 - 3x + 7$ => $f'(x) = 3x^2 - 3$

On veut étudier le signe de f '(x) donc il faut factoriser f '(x) ;

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x+1)(x-1)$ => $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x) = 3x^2 - 3$		+	0	−	0	+	
$f(x) = x^3 - 3x + 7$		croissante	9	décroissante	5	croissante	