SUITES AUXILIAIRES

Exercice 1:

a) Soit $(V_n)_{n\geq0}$ une suite telle que $V_0 = 2$ et $V_{n+1} = 3V_n-2$. La suite est-elle arithmétique? Géométrique?

b) Soit $(U_n)_{n\geq0}$ définie par $U_n = V_n-1$. Démontrer que $(U_n)_{n\geq0}$ est une suite géométrique.

c) Exprimer U_n en fonction de n.

d) En déduire V_n en fonction de n.

e) Calculer V_{100} .

Solution:

a) Une suite arithmétique est une suite de nombres que l'on obtient en ajoutant une constante (raison : r) au précédent.

D'une manière générale, une suite (U_n) est arithmétique de premier terme U_0 et de raison r, si pour tout n, $U_{n+1}=U_n+r$

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, nous avons deux possibilités :

- Soit on démontre pour tout n que $U_{n+1}-U_n=r$ (un nombre réel)
- Soit on démontre que pour tout n, $U_n=a+nr$ (avec a et r deux réels) et dans ce cas, $U_0=a$ et la raison est r. (Attention, on peut aussi être amené à démontrer que $U_n=a+(n-1)r$, le seul changement étant que le premier terme est $U_1=a$)

Si on calcule les premiers termes de la suite V_n on a:

$V_0 = 2$

$V_{(0+1)} = 3.V_0 - 2 \Rightarrow V_1 = 3.2-2 = 4$

$V_{(1+1)} = 3.V_1 - 2 \Rightarrow V_2 = 3.4-2 = 10$

$V_{(2+1)} = 3.V_2 - 2 \Rightarrow V_3 = 3.10-2 = 28$

……..

V_1-V_0 = 4-2 = 2

V_2-V_1 = 10-4 = 6

V_3-V_2 = 28-10 = 18

....

V_1-$V_0 \neq V_2$-$V_1 \neq V_3$-V_2 .....

On remarque qu'ils ne représentent pas une suite arithmétique.

Remarque: Pour démontrer qu'une suite n'est pas arithmétique, il suffit de vérifier avec les premiers termes que l'on n'a pas:

$U_{n+1} - U_n$ = *constante* = *r*

Cela revient à montrer que:

$U_1 - U_0$ *est différent de* $U_2 - U_1$

Une suite géométrique est une suite de nombres que l'on obtient en multipliant une constante différente de zéro (raison : q) au précédent.

D'une manière générale, une suite (U_n) est géométrque de premier terme U_0 et de raison q, si pour tout n, $U_{n+1} = q.U_n$

Pour démontrer qu'une suite est géométrqiue, nous avons deux possibilités :

- soit on démontre pour tout n que U_{n+1}/U_n=q (un nombre réel)
- soit on démontre que pour tout n, U_n=a.q^n (avec a et q deux réels) et dans ce cas, U_0=a et la raison est q. (Attention, on peut aussi être amené à démontrer que U_n=a.$q^{(n-1)}$, le seul changement étant que le premier terme est U_1=a)

V_0 = 2 et on a déjà calculé:

V_1 = 4 V_2 = 10 V_3 = 28 ....

V_1/V_0 = 4/2 = 2

V_2/V_1 = 10/4 = 5/2 = 2,5

$V_3/V_2 = 28/10 = 14/5 = 2,8$

……..

$V_1/V_0 \neq V_2/V_1 \neq V_3/V_2$ …..

On remarque qu'ils ne représentent pas une suite géométrique.

Remarque: Pour démontrer qu'une suite n'est pas géométrique, il suffit de vérifier avec les premiers termes que l'on n'a pas:

$U_{n+1}/U_n = constante = q$

Cela revient à montrer que:

U_1/U_0 est différent de U_2/U_1

b) Si on calcule les premiers termes de U_n, on a:

$U_0 = V_0-1 = 2-1 = 1$

$U_1 = V_1-1 = 4-1 = 3$

$U_2 = V_2-1 = 10-1 = 9$

$U_3 = V_3-1 = 28-1 = 27$

……..

$U_1/U_0 = 3/1 = 3$

$U_2/U_1 = 9/3 = 3$

$U_3/U_2 = 27/9 = 3$

……..

On remarque qu'ils représentent le début d'une suite géométrique de raison q=3, mais ce n'est pas suffisant pour démontrer que U_n est géométrique, il faut le prouver pour tout n.

On va démontrer pour tout n que $U_{n+1}/U_n=q$ (un nombre réel)

$U_n = V_n-1 \quad \Rightarrow \quad U_{n+1} = V_{n+1}-1 = (3.V_n-2)-1 = 3.V_n-3 = 3.(V_n-1)$

$$U_{n+1}/U_n = \frac{3.(V_n-1)}{V_n-1} = 3$$

Donc U_n est géométrique de raison q=3 et de premier terme $U_0=1$

c) Pour exprimer U_n en fonction de n, il suffit d'écrire le terme général de U_n .

Le terme général d'une suite géométrique:

$U_n = U_0.q^n$

$U_0=1$ et $q=3$

Donc: $\boxed{U_n = 1.3^n = 3^n}$

d) On nous donne $U_n = V_n-1$.

D'où, on obtient:

$3^n = V_n\text{-}1 \Rightarrow \boxed{V_n = 3^n + 1}$

e) $V_n = 3^n + 1 \Rightarrow \boxed{V_{100} = 3^{100} + 1}$

Exercice 2:

a) Soit $(V_n)_{n\geq0}$ une suite telle que $V_0 = 0{,}7$ et $V_{n+1} = 3V_n+4$. La suite est-elle arithmétique? Géométrique?

b) On pose $U_n=V_n+2$ pour tout $n\in IN$. Montrer que la suite de terme général U_n est géométrique.

c) En déduire l'écriture V_n en fonction de n.

d) Calculer V_7 .

Solution:

a) Si on calcule les premiers termes de la suite V_n on a:

$V_0 = 0{,}7$

$V_{(0+1)} = 3.V_0 + 4 \Rightarrow V_1 = 3.0{,}7+4 = 6{,}1$

$V_{(1+1)} = 3.V_1 + 4 \Rightarrow V_2 = 3.6{,}1+4 = 22{,}3$

$V_{(2+1)} = 3.V_2 + 4 \Rightarrow V_3 = 3.22{,}3+4 = 70{,}9$

……..

V_1-V_0 = 6,1-0,7 = 5,4

V_2-V_1 = 22,3-6,1 = 16,2

V_3-V_2 = 70,9-22,3 = 48,6

……..

$V_1-V_0 \neq V_2-V_1 \neq V_3-V_2$ …..

<u>On remarque qu'ils ne représentent pas une suite arithmétique.</u>

V_1/V_0 = 6,1/0,7= 8,71

V_2/V_1 = 22,3/6,1= 3,66

V_3/V_2 = 70,9/22,3= 3,18

$V_1/V_0 \neq V_2/V_1 \neq V_3/V_2$ …..

<u>On remarque qu'ils ne représentent pas une suite géométrique.</u>

b) Si on calcule les premiers termes de U_n, on a:

U_0 = V_0+2 = 0,7+ = 2,7

U_1 = V_1+2 = 6,1+2 = 8,1

U_2 = V_2+2 = 22,3+2 = 24,3

U_3 = V_3−1 = 70,9+2 = 72,9

……..

U_1/U_0 = 8,1/2,7 = 3

U_2/U_1 = 24,3/8,1 = 3

U_3/U_2 = 72,9/24,3 = 3

……..

On remarque qu'ils représentent le début d'une suite géométrique de raison q=3, mais ce n'est pas suffisant pour démontrer que U_n est géométrique, il faut le prouver pour tout n.

On va démontrer pour tout n que U_{n+1}/U_n=q (un nombre réel)

$U_n = V_n+2 \quad => \quad U_{n+1} = V_{n+1}+2 = (3.V_n+4)+2 = 3.V_n+6 = 3.(V_n+2)$

$U_{n+1}/U_n = \dfrac{3(V_n+2)}{V_n+2} = 3 = q$ Donc U_n est géométrique de raison q=3 et de premier terme $U_0=2{,}7$.

Terme général de U_n : $U_n = 2{,}7.3^n$

c) $U_n = V_n+2 \Rightarrow V_n = 2{,}7.3^n-2$

d) $V_7 = 2{,}7.3^7-2 = 2{,}7.2187-2 = 5902{,}9$